

MÔN THI: TOÁN (Vòng 1)

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu I. 1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)y^2 + x + y = 3 \\ (y-2)x^2 + y = x+1 \end{cases}$$

2) Giải phương trình:

$$\sqrt{x + \frac{3}{x}} = \frac{x^2 + 7}{2(x+1)}.$$

Câu II. 1) Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức:

$$x^4 + y^4 = 7z^4 + 5.$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức:

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3.$$

Câu III. Cho hình bình hành $ABCD$ với $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Đường phân giác của góc \widehat{BCD} cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O khác C . Kẻ đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với CO . Đường thẳng (d) lần lượt cắt các đường thẳng CB, CD tại E, F .

- 1) Chứng minh rằng $\triangle OBE = \triangle ODC$.
- 2) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF .
- 3) Gọi giao điểm của OC và BD là I , chứng minh rằng $IB \cdot BE \cdot EI = ID \cdot DF \cdot FI$.

Câu IV. Với x, y là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + 8y^3}} + \sqrt{\frac{4y^3}{y^3 + (x+y)^3}}.$$